Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Développements :

Topologie des orbites de Steinitz, Loi de réciprocité quadratique.

Bibliographie :

Rombaldi, Perrin, Calais, Ulmer, Jeanneret Lines, H2G2, Gourdon

Rapport du jury :

Dans cette leçon, il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche via le morphisme du groupe agissant vers le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. La formule des classes et ses applications immédiates sont incontournables. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des groupes ou des anneaux. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide). S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en décrivant les actions naturelles de $PGL_2(F_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q = 2, 3$ et peuvent plus géné- ralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes. En notant que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations, ils pourront facilement en déterminer le caractère.

Remarque 1. *Regarder Minerve 2014/2015.*

1 Actions de groupes

1.1 Action d'un groupe sur un ensemble (définitions)

Définition 2 (Romb p19)**.** *Action à gauche.*

Remarque 3 (Perrin p13)**.** *[Calais p196][Ulmer p28] Equivalent à se donner un morphisme de groupes de G sur $S(E)$.*

Exemple 4 (Ulmer p28)**.** *[Jeanneret, Lines] $S(X)$ agit naturellement sur X.*
Pour un ev V, $GL(V)$ opère sur V.
S_n sur $[1, n]$,
S^1 sur $\mathbb{C}$,
les deux actions de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ ($(x, n) \mapsto x + n$ et $(x, n) \mapsto (-1)^n x$)

Exemple 5 (Ulmer p8)**.** *Les éléments du groupe diédral D_n sont par définition les isométries de R^2 préservant les sommets d'un polygone régulier à n cotés.*

Définition 6 (Romb p21)**.** *[Perrin Action transitive, simplement transitive.*

Exemple 7 (Perrin p16)**.** *S_n est transitive (et même n-transitive) ; les deux actions de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ ne sont pas transitives. A_n est $(n-2)$ fois transitif.*

Définition 8 (Romb p21)**.** *Action fidèle.*

Exemple 9. *La première action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ agit fidèlement, pas la deuxième.*
S_n agit sur $[1, n]$ fidèlement. $S(E)$ sur E est fidèle et transitive.
Autres exemples dans le Jeanneret.

Remarque 10 (Calais p208)**.** *Si G opère fidèlement sur E alors G est isomorphe à un sous-groupe de $S(E)$.*

1.2 Orbites, stabilisateurs

Définition 11 (Romb p20)**.** *Orbite.*

Proposition 12 (Romb p20)**.** *Les orbites forment une partition de E.*

Proposition 13 (Romb p21)**.** *Dans le cas d'une action transitive ou simplement transitive, il y a une seule orbite.*

Remarque 14. *G agit transitivement sur chaque orbite.*

Exemple 15 (Romb p36)**.** *[Perrin p14] Les orbites de R^n sous l'action naturelle de $O_n(\mathbb{R})$ sont les sphères de centre l'origine.*

Application 16 (Romb)**.** *Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints.*

Définition 17 (Romb p22)**.** *Stabilisateur.*

Proposition 18 (Romb p22)**.** *Les stabilisateurs sont des sous-groupes de G.*

Proposition 19 (Romb p22,37)**.** *[Perrin p14] L'application qui à $\sigma \in Stab_{S(E)}(x)$ associe sa restriction à $E - \{x\}$ réalise un isomorphisme du stabilisateur sur $S(F)$.*
Dans S_n sur $[1, n]$, le stabilisateur d'un point est isomorphe à S_{n-1}.

Application 20 (Romb p 37)**.** *$card(S(E)) = n!$.*

Proposition 21 (Ulmer p30)**.** *$ker(\phi) = \cup Stab(x)$.*

Proposition 22. *Le cardinal du stabilisateur est constant le long d'une orbite : $Stab_G(gx) = gStab_G(x)g^{-1}$.*

Proposition 23 (Romb p22)**.** *$G/Stab(x) \to Orb(x)$ est bien définie et bijective. Si G est fini alors $card(Orb(x))card(Stab(x)) = card(G)$.*

1.3 Action d'un groupe fini sur un ensemble fini : formule des classes et points fixes

[Ulmer p68]

Proposition 24 (Romb p22). *Equation des classes.*

Définition 25 (Romb p23). *E^G. C'est l'ensemble des éléments de E dont l'orbite est réduite à un point.*

Remarque 26 (Romb p23). *Formule des classes avec E^G.*

Application 27 (Ulmer p72). *Soit G un groupe d'ordre 77, agissant sur un ensemble de card 41 alors il existe un point fixe sous cette action*

Remarque 28. *Les résultats sur les p groupes de la partie suivante reposent sur cette formule.*

Proposition 29 (Romb p37). *Formule de Burnside.*

Application 30 (Combes). *Collier de perles.*

Application 31 (Romb). *Si G est un sous groupe fini non trivial de $SO_3(\mathbb{R})$, alors G est isomorphe à l'un des groupes suivants : $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ avec $m \geq 2$, D_m, A_4, S_4 ou A_5. (?)*

2 L'action pour mieux comprendre le groupe

2.1 Action par translation

Définition 32 (Romb p20). *Action par translation.*

Proposition 33 (Calais p200). $Stab(x) = \{e\}, Orb(x) = G$.

Proposition 34 (Calais p200,209). *G opère transitivement et fidèlement sur G.*

Application 35 (Combes). *[Ulmer p25] Théorème de Lagrange.*

Application 36 (Romb p21). *Tout groupe fini G d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe transitif de S_n.*

Définition 37 (Romb p21). *Un sous-groupe H de G agit par translation sur G.*

Proposition 38 (Romb p21). *Les orbites sont les classes à droite modulo H.*

Proposition 39 (Ulmer p32). *Action de G sur G/H.*

Proposition 40. *Cette action est transitive, mais en général pas fidèle ($Ker(\phi) = \cup_{g\in G} gHg^{-1}$)*

Application 41 (Ulmer p32). *$GL(2,3)$ est un sous-groupe de S_8.*
$GL(2)$ est un sous-groupe de S_3.

2.2 Action par conjugaison

Définition 42 (Romb p20). *Action par conjugaison.*

Remarque 43 (Romb p20). *G agit sur tout sous-groupe distingué par conjugaison.*

Définition 44 (Romb p21). *[Ulmer] Les orbites sont appelées classes de conjugaison. Le stabilisateur de h s'appelle le centralisateur de h dans G.*

Proposition 45. *Cette action n'est pas forcément fidèle (puisque $Z(G) \subset Ker\phi$ et n'est jamais transitive (le neutre est tout seul dans sa classe de conjugaison).*

Définition 46 (Romb p23). *p-groupe.*

Exemple 47. *D_4 est un 2-groupe.*

Remarque 48. *L'ensemble des points fixes correspond au centre du groupe.*

Proposition 49 (Romb p23). *Si G est un p groupe, alors $card(E^G) = card(E)[p]$.*

Corollaire 50 (Romb p23). $card(G) = card(Z(G)) + \sum card(O_i)$.

Application 51 (Romb p24). *Le centre d'un p groupe n'est pas trivial.*

Application 52 (Calais p207)[Romb p24). *Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.*

Théorème 53 (Romb p25). *Théorème de Cauchy. Pour tout diviseur premier de n, il existe un élément d'ordre p.*

Proposition 54 (Perrin p15). *Si $c \in S_n$ est un cycle d'ordre m, $c = (a_1, .., a_m)$, alors $\forall \tau \in S_n$, on a $\tau c \tau^{-1} = (\tau(a_1), .., \tau(a_m))$.*
Pour c un k-cycle de S_n, la classe de conjugaison de c est l'ensemble des k-cycles de S_n.
Si $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans A_n.

Application 55 (Perrin). *A_n est simple pour $n \geq 5$.*

Proposition 56 (Ulmer). *Classes de conjugaison de D_n.*

Définition 57 (Perrin p34). *Action d'un groupe sur l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison.*

Proposition 58 (Perrin). *Théorèmes de Sylow.*

2.3 Action sur un espace vectoriel : théorie des représentations

Remarque 59. *But : trouver les sous-groupes distingués d'un groupe, savoir s'il est simple...*

Définition 60 (Romb p179)**.** *[Ulmer] Représentation linéaire*

Remarque 61. *Lien avec les actions. Cela revient à se donner une action de groupe qui est K-linéaire (i.e une action de groupe qui respecte les ev)*

Exemple 62 (Romb)**.**

Définition 63 (Romb)**.** *Caractère*

Définition 64 (Romb)**.** *Sous espace G-invariant. Représentation irréductible. Caractère irréductible. Représentations équivalentes.*

Définition 65 (Romb)**.** *Noyau d'un caractère.*

Proposition 66 (Romb)**.** *Sous-groupes distingués par la table de caractères.*

Exemple 67. *Table de S_4*

3 Action pour mieux comprendre l'ensemble

3.1 Action sur l'espace des matrices

Définition 68 (H2G2 p209)**.** *Action par translation à gauche de GL_m sur $M_{m,n}$*

Définition 69 (H2G2)**.** *Matrice de dilatation, de transvection.*

Proposition 70 (H2G2 p230)**.** *Description de l'action à gauche par des matrices d'opérations élémentaires.*

Proposition 71 (H2G2 p209)**.** *Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même noyau. (Noyau : invariant complet)*

Définition 72 (H2G2 p204)**.** *Pivot. Matrice échelonnée en lignes + réduite.*

Proposition 73 (H2G2 2018 p209)**.** *Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite en lignes. On l'obtient par pivot de Gauss.*

Proposition 74. *SI A est une matrice carrée, il existe P tel que PA soit triangulaire supérieure.*

Application 75. *Résolution de systèmes linéaires. Décomposition LU. Calcul du déterminant. Calcul du rang.*

Définition 76 (H2G2 2018 p5)**.** *Action par équivalence.*

Proposition 77 (H2G2 2018 p6)**.** *[Théorème du rang] Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même rang. Dans ce cas, elles sont équivalentes à $I_{r,n-r}$.*

Proposition 78 (H2G2 2018 p10)**.** *Nombre de matrices de $M_{m,n}(F_q)$ de rang r.*

Proposition 79. *Action de Steinitz.*

Proposition 80 (H2G2 2018 p11)**.** *Ces orbites ne sont pas fermées : Il existe des matrices de rang r aussi proches que l'on veut de la matrice nulle. Ainsi, le rang n'est pas continu.*

Définition 81 (H2G2 2018 p122)**.** *Action par conjugaison*

Remarque 82. *Cette action s'interprête comme un changement de bases. A et B sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes*

Proposition 83 (H2G2 2018 p122)**.** *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles sont dans la même orbite. L'orbite est appelée classe de similitude.*

Proposition 84 (H2G2 2018 p141)**.** *L'action stabilise l'ensemble des matrices diagonalisables.*

Proposition 85. *Une matrice est diagonalisable si et seulement si son orbite contient une matrice diagonale. (Action très importante en théorie de la réduction.)*

Proposition 86 (H2G2 2018 p123)**.** *Le polynôme caractéristique, le spectre sont des invariants totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.*

Contre exemple 87 (H2G2 2018 p123)**.** *Le polynôme minimal est un invariant mais pas total.*

Proposition 88 (Gourdon p292)**.** *Dans $M_n(\mathbb{R})$, $n = 2$ ou 3, deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même polynome caractéristique et même polynôme minimal. Faux si $n \geq 4$.*

Proposition 89 (H2G2 p142)**.** *Les sauts de dimension dans la suite des noyaux itérés est un invariant total pour l'action de conjugaison de $GL_n(\mathbb{C})$ sur l'ensemble des matrices nilpotentes.*

Application 90. *Décomposition de Jordan.*

Théorème 91 (Gourdon p291)**.** *Décomposition de Frobenius.*

Proposition 92 (Gourdon p291)**.** *Les invariants de similitude constituent un invariant total de similitude.*

3.2 Action en géométrie affine

Définition 93. *Espace affine.*

On appelle espace affine un ensemble E sur lequel le groupe additif $(V,+)$ d'un espace vectoriel agit à droite transitivement et librement, via ($(u,M) \in V \times E \mapsto M+u$. Les éléments de E sont appelés les points, et ceux de V les vecteurs.

Remarque 94. *L'action étant libre et transitive, pour tous points $M, N \in E$, il existe un unique vecteur $u \in V$ tel que $M+u=N$. On note en général MN ce vecteur.*

Proposition 95 (Romb)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 3 et$X$une partie non-vide de E. $O(E)$ désigne le groupe des isométries affines de E. Le sous-groupe $Isom(X) := \{f \in O(E) tq f(X) = X\}$ des isométries de l'ensemble X agit naturellement sur X. On note $Isom^+(X)$ le sous-groupes des isométries de X de déterminant 1.*

Application 96. *S_4 agit sur les sommets du tétraèdre régulier et sur les grandes diagonales du cube.*

Corollaire 97. *S_4 est isomorphe à $Isom(T)$ et $Isom^+(C)$.*

Proposition 98. *On note T_4 le tétraèdre régulier. On a alors $Isom(T4) \simeq S_4$ et $Isom^+(T_4) \simeq A_4$.*

Proposition 99. *On note C_6 le cube en 3 dimensions. Alors $Isom(C_6) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $Isom^+(C_6) \simeq S_4$.*